ΠΡΟΤΑΣΗ (ολοκληρ. για κανονικά χωρία)

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$ και $C \subseteq \mathbb{R}^2$ τα πιο πάνω κανονικά χωρία και $f: B \to \mathbb{R}$ και $g: C \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Τότε f & g ολοκληρώσιμες και

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

και

$$\int_C g(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} g(x,y)\,dx \right) dy$$

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Αν $B = C \subseteq \mathbb{R}$ όπου B κανονικό χωρίο ως προς x και y και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx =$$

$$\left(= \int_C f(x,y)\,d(x,y) \right) = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω μια μπάλα ώστε:

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\} =$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: X_1(x,y)\le z\le X_2(x,y),\ (x,y)\in D\}=$$

όπου $X_1(x,y)=z_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$

$X_2(x,y)=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$

και

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$$

Όμως το D είναι κανονικό χωρίο ως προς x και y

Άρα, από προηγούμενο θεώρημα (όχι σημερινό)

$$\underbrace{V(M)}_{\int_M 1\, d(x,y,z)}=\int_D (X_2(x,y)-X_1(x,y))\,d(x,y)=2\int_D\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,d(x,y)$$

$$\underset{\text{σημερ}}{\overset{\text{Προτασ}}{=}} 2\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left(\int_{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,dy\right)dx$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\le y\le y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\}$

$$=2\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-u^2}\,du\right)dx=$$

$$=2\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left(\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,du\right)dx=$$

$$=2\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left(2\int_0^a\sqrt{a^2-u^2}\,du\right)dx\underset{\text{Απ2}}{=}\int_{x_0-r}^{x_0+r}2\frac{\pi}{4}a^2\,dx=$$

$$=\int_{x_0-r}^{x_0+r}\frac{\pi}{4}(r^2-(x-x_0)^2)\,dx=$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-\xi^2)\,d\xi=2\pi\int_0^r(r^2-\xi^2)\,d\xi=\frac{4\pi}{3}r^3$$

Η μπάλα είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο Oxy, αφού $x_1, x_2 : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ J-μετρήσιμο και συμπαγές και $x_1 \leq x_2$

ΠΡΟΤΑΣΗ (όπως η προηγούμενη αλλά 3-διάστατος χώρος)
Αν $M \subset \mathbb{R}^3$ κανονικό χωρίο ως προς το Oxy επίπεδο και $f : M \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \int_M f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$

$$= \int_D \left(\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)$$

Ειδικότερα $\to$ $V(M) = \int_M 1\, d(x,y) = \int_D \left(\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} 1\, dz \right) d(x,y)$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} 1\, dz \right) dy \right) dx$$

ΑΣΚΗΣΗ
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_A x^2\, d(x,y,z) \quad \text{με } A = [0,1]^3$$

ΛΥΣΗ
$A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$
$f : A \to \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = x^2$
$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{x_1(x,y)}{0} \leq z \leq \underset{x_2(x,y)}{1} \text{ και } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \} = D$

A κανονικό χωρίο ως προς επίπεδο Oxy

$$\int_A x^2\, d(x,y,z) = \int_D \left(\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} x^2\, dz \right) d(x,y) =$$

$$= \int_D \left(\int_0^1 x^2\, dz \right) d(x,y) = \int_D x^2\, d(x,y) \quad (1)$$

D κανονικό ως προς x
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ x \in [0,1] \}$

$$(1) \to \int_0^1 \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} x^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2\, dy \right) dx = \frac{1}{3}$$